

Hologramme mit nichtsphärischer Referenzwelle im inkohärenten Strahlungsfeld

P. BARLAI

Institut für Informationsverarbeitung in Technik und Biologie der Fraunhofer-Gesellschaft e. V.

(Z. Naturforsch. 27 a, 1777–1783 [1972]; eingegangen am 19. Juni 1972)

Holograms with Nonshperical Reference Wave in Incoherent Radiation Field

Fundamental features of hologram with a nonspherical reference wave are derived. It is known that a reconstruction of a hologram with arbitrary reference wave is free of aberrations only by exact reproduction of the reference wave.

However, holographic reconstruction with sufficient quality in numerous cases is possible with reduced requirement on the precision of replicating the reference wave. A single condition must be satisfied for that: the spatial crosscorrelation of the intensities of reference and reconstruction wave must have a sharp maximum. Then reconstruction with a spatially extended incoherent light source is also possible.

With this knowledge, some important consequences are stated. E. g. a single holographic reconstruction is free of granularity which is necessary for practicable holographic microscopy. Moreover, the well-known possibilities of holographic coding and associative storage can be easily realized.

1. Die mathematischen Grundlagen der holographischen Abbildung in kohärentem Licht

Im folgenden werden insbesondere die Eigenschaften von Fourier-Hologrammen zweidimensionaler Strukturen behandelt. Dies ergibt eine mathematisch günstige Beschreibung ohne Verlust an Allgemeingültigkeit, denn die gewonnenen Schlußfolgerungen lassen sich auch auf den komplizierteren Fall von Fresnel-Hologrammen unter etwas größerem mathematischen Aufwand unmittelbar übertragen.

Die kohärente Überlagerung eines Objekts o mit einer Referenz r führt zur folgenden Lichtintensitätsverteilung I im Fernfeld:

$$I = R^+ R + O^+ O + R^+ O + R O^+ \quad (1.1)$$

r und o bzw. die dazugehörigen Fourier-Spektren (hier im Ortsbereich) sind komplexe Größen, das Kreuz bezeichnet die dazugehörigen konjugiert-komplexen Größen, Fourier-Spektren sind durch entsprechende Großbuchstaben gekennzeichnet. Eine im Fernfeld aufgestellte Photoplatte hat nach einer Entwicklung auf einen Gammawert von -2 dann genau Gl. (1.1) als Amplitudentransparenz. Durchstrahlung der Platte mit einer Rekonstruktionswelle p ergibt dann

$$PI = PR^+ R + PO^+ O + PR^+ O + PRO^+ \quad (1.2)$$

Sonderdruckanforderungen an Dr. P. BARLAI, Institut für Informationsverarbeitung in Technik und Biologie der Fraunhofer-Gesellschaft, D-7500 Karlsruhe, Breslauer Str. 48.

als komplexe Amplitudenverteilung unmittelbar hinter der Platte. Im Fernfeld (jetzt auf die Platte bezogen) ergibt sich die Fourier-Transformierte von Gl. (1.2) als Amplitudenverteilung, also

$$p(x) * i(x) = p(x) * [r^+(x) \otimes r(x)] + p(x) * [o^+(x) \otimes o(x)] \quad (1.3) \\ + p(x) * [r^+(x) \otimes o(x)] + p(x) * [r(-x) \otimes o^+(-x)].$$

Das Symbol $*$ bezeichnet die mathematische Vorschrift der Faltung, das Symbol \otimes jene der Korrelation. Der Einfachheit halber wird die Rechnung für Funktionen von nur einer Variablen durchgeführt. Eine explizite Schreibweise der Faltungsintegrale mit Rechenregeln für die Mehrfachfaltung ist im Anhang angegeben.

Der 3. und 4. Term von Gl. (1.3) trägt die Information über die komplexe Objektamplitude. Eine Umformung z. B. des 3. Terms führt zu

$$p(x) * [r^+(x) \otimes o(x)] = p(x) * r^+(-x) * o(x) \\ = [p(x) \otimes r^+(x)] * o(x) \quad (1.4)$$

(assoziatives Gesetz der Faltung), wobei von der Tatsache Gebrauch gemacht wird, daß durch Koordinatenumkehr eine Faltung in eine Korrelation übergeführt werden kann und umgekehrt.

Wird, wie es in der Praxis der Holographie oft der Fall ist, $p(x)$ gleich $r(x)$ gesetzt, dann steht auf der rechten Seite von Gl. (1.4) die Autokorrierte von $r(x)$. In vielen Fällen wählt man eine punktförmige Referenzquelle, also in dieser systemtheoretischen Betrachtung einen δ -Impuls. Dessen Autokorrierte ist wieder ein δ -Impuls, so daß $o(x)$ sich in Gl. (1.4) getreu abbildet.



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

Notwendig für eine getreue Rekonstruktion eines Objekts ist demnach eine Autokorrelierte der Referenzwelle mit scharf ausgeprägtem Maximum (Ausblendeigenschaft der δ -Funktion). Diese einschränkende Bedingung an die Referenzwelle, auf die schon Gabor hingewiesen hatte, wird aber auch von vielen räumlich ausgedehnten Objekten erfüllt, insbesondere, wenn diese diffus strahlen, denn diffus kohärente Strahlung bedeutet, daß die Amplitude auf einem Objekt vor allem in der Phase zahlreiche, räumlich statistische Schwankungen erfährt^{1, 2}.

Hinreichend für eine getreue Objektrekonstruktion ist aber auch eine scharf ausgeprägte Kreuzkorrelierte zwischen $r(x)$ und $p(x)$, wie man aus Gl. (1.4) unmittelbar erkennt, d. h. es ist nicht unbedingt notwendig, die Referenz- und Rekonstruktionswelle exakt gleich zu wählen. Man kann demnach praktisch beliebige, diffuse Strahlung als Referenzwelle nehmen, und Hologramme diffuser Objekte zeigen bekanntlich im Vergleich zu Hologrammen mit gerichtetem Strahlengang verschiedene Vorteile, wie z. B. überall gleichmäßige und optimale Aussteuerung der Filmkennlinie³.

Für eine praktische verwertbare Objektrekonstruktion ist es jedoch nach Gl. (1.4) notwendig, zumindest Teile der Referenzwelle genau zu reproduzieren⁴. Für die Realisierung bedeutet dies eine interferometrisch genaue Reproduzierbarkeit der mechanischen Abmessungen zwischen Aufnahme- und Wiedergabevorgang. Es sei hier daran erinnert, daß die Erscheinung der Granulation kohärent diffus strahlender Objekte ihrem Wesen nach zwar ein statistischer Prozeß ist, eine einzelne Granulationsverteilung trägt aber Information über die Mikrostruktur des Objekts, sie ist ein Repräsentant aus einem stochastischen Prozeß. Andere Repräsentanten entstehen z. B. schon durch kleine Änderungen der Abmessungen in einem kohärent diffusen Strahlengang. Statistische Kenngrößen erhält man durch Bildung bestimmter Mittelwerte, die man hier als Scharmittelwerte (über eine Gesamtheit von verschiedenen diffus kohärent-optischen Abbildungen eines Musters) auffaßt^{2, 5}.

Zwei verschiedene Repräsentanten eines stochastischen Prozesses sind statistisch unkorreliert, was zur Folge hat, daß das Objekt in der Rekonstruktion völlig unkenntlich bleiben wird, wenn die Mikrostruktur der Rekonstruktionswelle mindestens in einigen Bereichen mit der der Referenzwelle nicht übereinstimmt. Diese Tatsache ist seit längerer Zeit

bekannt und sie wurde auch schon zur wirksamen Codierung einer Nachricht vorgeschlagen, da es ohne Kenntnis der Referenzwelle praktisch unmöglich ist, diese für eine Rekonstruktion oder Decodierung genügend genau zu reproduzieren.

2. Rekonstruktion von Hologrammen im räumlich inkohärenten Licht⁶

So vielversprechend diese Eigenschaften von Hologrammen mit nichtsphärischer Referenzwelle für bestimmte Anwendungsbereiche auch sind, steht einem praktischen Einsatz die Forderung nach interferometrisch genauer Reproduzierbarkeit zwischen Aufnahme- und Wiedergabeapparatur ernsthaft im Wege. Wenn man diese hohe Anforderung fallen läßt, und die Maßhaltigkeit nicht größer macht als bei einer jeden inkohärent-optischen Abbildung, dann werden Referenz- und Rekonstruktionswelle in ihrer Mikrostruktur nicht mehr übereinstimmen, und die Frage ist nun, ob es unter diesen einschränkenden Voraussetzungen trotzdem möglich ist, eine brauchbare Rekonstruktion zu bekommen.

Für die Lösung dieses Problems ist die Tatsache bedeutsam, daß die systemtheoretischen Kenngrößen wie Impulsreaktionsfunktion und Modulationsübertragungsfunktion eines diffus kohärent optischen Systems stochastiche Variable sind, deren Erwartungswert gleich den systemtheroretischen Kenngrößen des gleichen, aber diffus inkohärent optischen Systems ist². Die zur Bildung der Erwartungswerte erforderliche Scharmittelung wird durch das inkohärente Strahlungsfeld als Zeitmittelung vollzogen. Übereinstimmung zwischen Referenz- und Rekonstruktionswelle ist auf Grund der reduzierten Anforderung bezüglich Maßhaltigkeit bestenfalls bei deren statistischen Kenngrößen möglich, also ist eine statistische Beschreibung der holographischen Grundgleichung (1.1), die sich auf statistische Kenngrößen beschränkt, die dem Problem angemessene.

Unter Einführung dieser statistischen Betrachtungsweise in Gl. (1.4) kann man jetzt die Bedingung für getreue Objektrekonstruktion aufstellen, wobei zu beachten ist, daß die Intensität, also das Betragsquadrat von (1.4) beobachtet wird, daß man aber im allgemeinen das gemittelte Betragsquadrat (welches der Intensität im inkohärenten Fall entspricht) zu beobachten wünscht. Demnach lautet die Forderung bei diffus kohärenter Rekonstruktions-

welle

$$\langle |p(x) * r^*(-x) * o(x)|^2 \rangle = \langle |o(x)|^2 \rangle \quad (2.1)$$

bzw.

$$\left. \begin{aligned} \langle |p(x) * [r^*(x) \otimes o(x)]|^2 \rangle \\ \langle |r^*(x) \otimes [p(x) * o(x)]|^2 \rangle \\ \langle |o(x) * [p(x) \otimes r^*(x)]|^2 \rangle \end{aligned} \right\} = \langle |o(x)|^2 \rangle. \quad (2.2)$$

Die spitzen Klammern bezeichnen das Scharmittel über eine Gesamtheit von diffus kohärent optischen Abbildungen desselben Musters mit jeweils verschiedener Granulationsverteilung².

Die drei verschiedenen Zusammenfassungen im Gl.-System (2.2) ergeben sich rein formal aus dem assoziativen Gesetz der Faltung, man kann aber auch systemtheoretisch drei verschiedene, in ihrer Wirkung aber gleichwertige Betrachtungsweisen auf Gl. (2.1) anwenden. Die in der eckigen Klammer zusammengefaßten zwei Funktionen sind Impulsreaktionsfunktionen eines optischen Systems. Die erste Zeile in Gl. (2.2) beinhaltet die bekannte Tatsache, daß die Impulsreaktionsfunktion eines Hologramms mit beliebiger Referenzwelle gleich der Kreuzkorrelierten zwischen Referenz- und Objektwelle ist, die zweite Zeile besagt, daß die Referenzwelle, durch die Wirkung von Rekonstruktions- und Objektwelle entsprechend modifiziert, sich in die Ausgangsgröße abbildet und die dritte Zeile besagt das gleiche für die Objektwelle. Also sind $r(x)$, $o(x)$ und $p(x)$ mathematisch und begrifflich gleichwertig und demnach vertauschbar.

Der entscheidende und diesem Abschnitt zugrunde liegender Gedanke ist nun folgender. Gleichung (2.1) und (2.2) bleiben unverändert, wenn man darin $p(x)$ durch eine räumlich inkohärent strahlende Quelle mit der gleichen mittleren Intensität, wie sie die kohärente Rekonstruktionswelle hatte, ersetzt. Dann läßt sich Gl. (2.1) in

$$\begin{aligned} \langle |p(x) * r^*(-x) * o(x)|^2 \rangle \\ = \langle |p(x)|^2 * \langle |r(-x)|^2 * \langle |o(x)|^2 \rangle \rangle \\ = \langle |p(x)|^2 \otimes \langle |r(x)|^2 * \langle |o(x)|^2 \rangle \rangle \\ = \langle |o(x)|^2 \rangle \end{aligned} \quad (2.3)$$

umschreiben unter Beachtung der Tatsache, daß die Impulsreaktionsfunktion eines inkohärenten Systems gleich dem Betragsquadrat der Impulsreaktionsfunktion des diffus kohärenten Systems unter sonst gleichen Bedingungen ist⁷. Wie schon erwähnt, wird hier die Mittelung durch das inkohärente Feld selbst vollzogen, d. h. im inkohärenten Fall wird der Mit-

telwert auch wirklich beobachtet, während er im kohärenten Fall nur eine Rechengröße mit störenden, räumlichen Fluktuationen (Granulation) ist.

Gleichung (2.3) enthält das wichtigste Ergebnis dieses Abschnitts und der ganzen Arbeit. Demnach wird eine Objektrekonstruktion mit einer räumlich ausgedehnten, räumlich inkohärent strahlenden Lichtquelle immer dann erfolgreich sein, wenn die Kreuzkorrelierte der Lichtintensitäten zweier sonst beliebiger Strukturen [in Gl. (3.3) $|p(x)|^2$ und $|r(x)|^2$ genannt] im inkohärenten Licht ein genügend scharfes Maximum hat. Die in Gl. (2.3) vorkommenden Größen sind Lichtintensitäten; Gl. (2.3) ist die systemtheoretische Beschreibung eines intensitätslinearen Systems.

3. Konsequenzen

In diesem abschließenden Kapitel werden einige wichtige Konsequenzen in bezug auf praktische Anwendungen sowie Einschränkungen behandelt, die durch den Übergang auf räumlich inkohärentes Licht entstehen.

3.1. Holographische Mikroskopie

Es ist nunmehr eine holographische Mikroskopie möglich, die weitgehend an die Wirkungsweise konventioneller Lichtmikroskope angepaßt ist. Es ist von Vorteil, daß eine räumlich ausgedehnte, inkohärente Rekonstruktionswelle verwendet wird, denn dies bedeutet, daß die Rekonstruktionswelle unter einem großen Raumwinkel bzw. numerischer Apertur auf das Hologramm trifft. Die Rekonstruktionswelle wirkt also wie die Beleuchtungsapparatur oder wie der Kondensor eines Mikroskops, d. h. man kann die herkömmlichen Mikroskopkondensoren (bis auf ein zusätzliches Farbfilter) für diese Art von holographischer Mikroskopie unverändert übernehmen.

Ein praktisches Beispiel dazu sei an der Figur in Abb. 1 erläutert. Das A ist die Objekt-, der Kreisring die Referenzstruktur. Wenn man diese Figur diffus kohärent durchstrahlt, ergibt die Registrierung des Fernfeldes ein Hologramm mit offensichtlich nichtsphärischer Referenzwelle. Wenn man dieses Hologramm mit einem gleichgroßen, inkohärent strahlenden Kreisring rekonstruiert, erhält man die in Abb. 2 gezeigte Objektstruktur [entsprechend der holographischen Grundgleichung (1.2) erscheint das A zweimal als Bild und als konjugiertes Bild]. Der

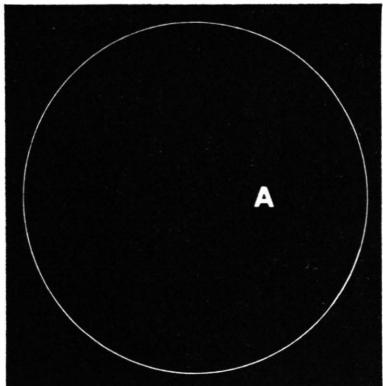


Abb. 1. Vorlage für ein Hologramm mit nichtsphärischer Referenzwelle. Der Durchmesser des Kreises in der Vorlage betrug 20 mm bei einer Strichstärke von 0,05 mm, der Abstand Hologramm—Vorlage war bei der Aufnahme 100 mm bei $\lambda = 632,8$ nm.

hier als Referenz- und als Rekonstruktionswelle verwendete Kreisring ist eine von vielen möglichen Strukturen; er soll nur die Verbindung zur konventionellen Lichtmikroskopie deutlich machen, an seine Stelle kann ein beliebiger Mikroskop-Ringkondensor genommen werden.

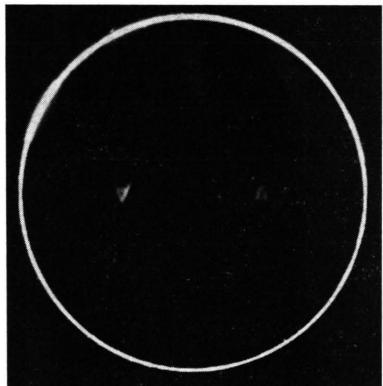


Abb. 2. Holographische Rekonstruktion des Objekts A durch den Kreisring im diffus inkohärenten Licht. Aus der Arbeit geht hervor, daß der Kreisring oder Teile desselben als Referenz- bzw. als Rekonstruktionsstruktur, und daß das A als Objektstruktur geeignet ist, aber nicht umgekehrt. Das A wird als direktes und als konjugiertes Bild zweimal rekonstruiert. Durch die Verwendung von inkohärentem Licht wird die Erscheinung der Granulation unterdrückt. — Die Verwendung eines z. B. statistisch verlaufenden Kurvenzuges als Referenzstruktur würde auch das konjugierte Bild unterdrücken, da dann Korrelation und Faltung der Referenzstruktur mit sich selbst verschieden ausfallen. Während die Korrelation immer ein lokales Maximum hat, ist dies bei der Faltung im allgemeinen nicht der Fall, so daß die Objektstruktur in der Rekonstruktion nur einmal erscheint.

Diese Art von holographischer Rekonstruktion kann unmittelbar auf dreidimensionale Objekte

übertragen werden, denn man kann die in Gl. (2.1) bis (2.3) angestellte Betrachtung unabhängig auf jede Objektebene anwenden. Der dabei durchzuführende Übergang von der Fourier- zur allgemeineren Fresnel-Transformation in den genannten Gleichungen ist für das Prinzip unwesentlich.

3.2. *Granulationsfreie Objektrekonstruktion*

Die Darstellung nach Abb. 2 ist auch gleichzeitig granulationsfrei, was eine weitere wichtige Bedingung für die Praxis der holographischen Mikroskopie ist. Es gibt in der Holographie verschiedene Methoden einer granulationsfreien Rekonstruktion; einmal die Mikrostruktur einer Streuscheibe exakt nachzubilden (was bekanntlich zu der strengen Anforderung der interferometrisch genauen Reproduzierbarkeit der Maße führt), und einmal durch inkohärente Überlagerung vieler Einzelrekonstruktionen desselben Objekts mit jeweils verschiedener Granulationsverteilung entweder zeitlich nacheinander⁸ oder simultan⁵ einen granulationsfreien Mittelwert zu erhalten. Für die hier verwendete Wirkungsweise der granulationsfreien Wiedergabe gilt das in⁵ Gesagte, sie beruht auf der simultanen, inkohärenten Überlagerung vieler Einzelrekonstruktionen und der dadurch bedingte Ausmittelung der Granulation. Quantitativ ergibt sich der Grad der Ausmittelung folgendermaßen: die wirksame Eintrittspupille, die entweder durch das Hologramm oder durch eine nachfolgende Optik gegeben ist, legt durch die Auflösungsgrenze die maximale Anzahl der unterscheidbaren Bildpunkte auf der rekonstruierenden Lichtquelle fest. Ein jeder Bildpunkt leuchtet die Eintrittspupille räumlich kohärent aus und daher ist auch die zu einem bestimmten Bildpunkt gehörende Rekonstruktion [hier die Kreuzkorrelierte zwischen $r(x)$ und $o(x)$] in sich räumlich kohärent mit einer bestimmten Mikrostruktur der Granulation. Zwei Rekonstruktionen, die von zwei unterscheidbaren Bildpunkten der rekonstruierenden Lichtquelle herühren, sind zueinander inkohärent und haben eine verschiedene Mikrostruktur der Granulation, da der Blickwinkel vom Hologramm in Richtung Rekonstruktionslichtquelle von Bildpunkt zu Bildpunkt sich ändert. Bei n unterscheidbaren Bildpunkten wird durch inkohärente, intensitätslineare Überlagerung von n Einzelrekonstruktionen die durch Granulation verursachte Fluktuation um den Faktor $1/n$ reduziert⁵. Bei einer räumlich ausgedehnten Rekonstruktionsquelle ist es leicht, auf dieser mehrere Größen-

ordnungen unterscheidbarer Bildpunkte nachzuweisen und daher ist die Wirkung der Granulation bis auf einen praktisch unmeßbar kleinen Wert ausgemittelt⁹.

3.3. Zusätzliche Bildverarbeitung

Durch geeignete Modifikation der rekonstruierenden Lichtquelle kann man das rekonstruierte Objekt in gewissen Grenzen verändern. Von den vielen Möglichkeiten, die sich dadurch ergeben, sei nur eine erwähnt. Ein Objekt, das als Positiv vorgelegen hat, kann man als Negativ (im photographischen Sinne) rekonstruieren, wenn man das Negativ des Referenzmusters für die Rekonstruktion wählt.

3.4. Codierung

Das Wellenfeld eines kohärent strahlenden Objekts kann als Hologramm angesehen werden, denn es ist möglich, mit einem Teil des Objekts den Rest zu rekonstruieren. Teil und Rest sind begrifflich als Referenz- und Objektwelle aufzufassen, und es ist offensichtlich, daß diese additive Aufspaltung mathematisch auf unendlich viele, verschiedene Weise möglich ist. Dieser Gedanke ist die Grundlage einer absolut sicheren holographischen Codierung einer Nachricht sowie für holographisch realisierte assoziative Speicher¹⁰, denn sie ermöglicht eine praktisch unbegrenzte Variationsbreite in bezug auf Wahl der als Codierungsschlüssel dienenden Referenzwelle.

Die holographische Decodierung kann auch mit inkohärentem Licht bei wesentlich geringerem, experimentellen Aufwand gegenüber dem kohärenten Verfahren vorgenommen werden; die Anzahl der Möglichkeiten für die Wahl eines Codierungsschlüssels ist auch hier praktisch unbegrenzt, solange die durch Gl. (2.3) festgelegte Bedingung eingehalten wird. Auch entfällt hier die hohe Anforderung an die Reproduzierbarkeit der Justierung, wie sie von kohärent-optischen Verfahren bekannt ist.

3.5. Einschränkungen und Grenzen des Verfahrens

Bei diesem Verfahren wird die in der Rekonstruktion erreichbare Auflösung durch folgendes Kriterium bestimmt: Für vollständig getreue Objektwiedergabe mit unendlich hoher Auflösung muß die Kreuzkorrelierte der Lichtintensitäten zwischen $r(x)$ und $p(x)$ gemäß Gl. (3.3) einen δ -Impuls ergeben. Praktisch wird jedoch diese Kreuzkorrelierte stets in einem endlichen Bereich von Null verschieden

sein, und eine räumlich ausgedehnte Impulsreaktionsfunktion hat nach der Systemtheorie Tiefpaßwirkung; in voller Analogie zur klassischen Behandlung der optischen Abbildung, wo die Beugungsfigur eines Punktes (das „Punktbild“) unmittelbar ein Maß für die Auflösungsgrenze ist.

Auf die Rekonstruktion bezogen, entspricht die Auflösungsgrenze bei dem dargelegten Verfahren demnach etwa der Halbwertsbreite der Kreuzkorrelierten zwischen $r(x)$ und $p(x)$. Der im Demonstrationsbeispiel als Referenzstruktur verwendete Kreisring hat eine Autokorrelierte mit der Strichdicke des Kreisringes als Halbwertsbreite.

Im allgemeinen ist die Halbwertsbreite durch zwei Einflüsse bestimmt: einmal durch endliche Strichdicke der Referenzstruktur und einmal durch die Wellennatur des Lichts, denn auch unendlich dünne Linien werden durch Beugung immer mit einer endlichen Strichdicke wiedergegeben. Aus dieser Überlegung läßt sich die Vorschrift für die optimale Dimensionierung der Referenzstruktur bezüglich Auflösung und Helligkeit der Rekonstruktion unmittelbar angeben: Wenn man keine Verminderung der Auflösung hinnehmen will, dann muß die Strichstärke der Referenzstruktur gerade so fein gewählt werden, daß sie der durch die numerische Apertur des Hologramms bestimmten Auflösungsgrenze (jetzt auf das Objekt bezogen) entspricht. Noch feinere Strichstärken bringen demnach keine Steigerung der Auflösung mehr, sondern nur noch einen Verlust an Helligkeit in der Rekonstruktion.

Die einzige Einschränkung des Verfahrens der Rekonstruktion eines Hologramms mit räumlich inkohärentem Licht ist das Vorhandensein eines Störuntergrundes. Dessen Existenz erklärt sich unmittelbar aus der räumlich ausgedehnten Kreuzkorrelierten zwischen $r(x)$ und $p(x)$ in Gleichung (2.3). Als Kreuzkorrelierte von Lichtintensitäten ist diese immer positiv und die Frage ist nun, wie sich die Lichtleistung zwischen zentralem Maximum der Korrelationsfunktion und der Umgebung aufteilt, denn dieselbe Aufteilung besteht auch zwischen Objektkonstruktion und Störuntergrund.

Die folgende Rechnung ist auf den Fall der Autokorrelierten beschränkt, d. h. zur Rekonstruktion wird jenes inkohärent strahlende Bildmuster verwendet, welches als kohärent strahlendes Muster unter sonst gleichen Bedingungen das Referenzobjekt für die holographische Aufnahme darstellte. Die Autokorrelierte des Referenzmusters kommt folgen-

dermaßen zustande: n zueinander inkohärent strahlende Bildpunkte rufen nach Gl. (1.7) n -mal das Referenzmuster an verschiedenen Orten auf. Im Zentrum überlagern sich die n Referenzmuster n -mal und bilden so das Maximum der Autokorrelationsfunktion, während an einem beliebigen anderen Punkt die Wirkung der Überlagerung immer geringer sein wird. Diese bekannte Eigenschaft der Autokorrelationsfunktion, ein lokales Maximum zu haben, wird von einer beliebigen Kreuzkorrelationsfunktion bestenfalls erreicht aber nie überschritten, d. h. die energetische Aufteilung zwischen Maximum und dem Rest des Korrelogramms ist bei der Autokorrelationsfunktion am günstigsten.

Wenn die Lichtenergie auf die n Bildpunkte einer Rekonstruktion sich gleich verteilt, dann entfällt pro Rekonstruktion (im relativen Maß) der Energiebetrag 1 auf das Korrelationszentrum, während der Energiebetrag $(n-1)$ auf den Rest des Korrelogramms sich verteilt. Durch inkohärente Überlagerung von n Rekonstruktionen ist die Gesamtenergie im Zentrum gleich n , im übrigen Korrelogramm gleich $n(n-1)$. Daher wird

$$\frac{\sum E_{(\text{Zentrum})}}{\sum E_{(\text{Störuntergrund})}} = \frac{n}{n(n-1)} \approx \frac{1}{n} \quad (3.1)$$

für $n \gg 1$. Die praktische Konsequenz für die Verwendung von inkohärenten Lichtquellen für die holographische Rekonstruktion ist demnach folgende: die durch Gl. (2.3) festgelegte Bedingung wird offensichtlich am besten von punkt- und linienhaften Strukturen als Referenzmuster erfüllt. Der Hauptteil der Information muß demnach in der Struktur oder besser in der Berandung des als Struktur verwendeten Referenzmusters enthalten sein. Dann bleibt der Einfluß der Granulation für das Zustandekommen des δ -Impulses in Gl. (2.3) unwirksam. Flächenhafte Strukturen eignen sich demnach nicht als Referenzmuster, denn hier wird der Hauptteil der Information bei der holographischen Aufzeichnung durch die Granulation getragen und deshalb wird bei einer holographischen Rekonstruktion mit inkohärentem Licht mit der Granulation auch die Bildinformation unterdrückt. Gleichung (3.1) legt zwar die Energie des Störuntergrundes fest, aber man kann die Energiedichte von der Stelle des rekonstruierten Objekts dadurch klein halten, daß man das Referenzmuster wesentlich größer macht als das Objekt. Diese Bedingung ist in Abb. 1

erfüllt und führt gerade durch die dann notwendig hohe Apertur des Referenzmusters auch gleichzeitig zu den schon behandelten Vorteilen in einer praxisorientierten, holographischen Mikroskopie. Ein Hologramm dieser Art ist dann ein weiteres einfaches herstellendes, optisches Bauelement in allen Arten von inkohärent-optischen Anordnungen.

Es ist interessant zum Abschluß die eben durchgeführte Energiebetrachtung auf ein kohärentes System mit exakter Positionierungsmöglichkeit zu übertragen. Für eine Rekonstruktion besteht die gleiche, energetische Aufteilung zwischen Zentrum und Störuntergrund wie für das inkohärente System. Kohärentes Überlagern von n Rekonstruktionen führt hier zu einer (durch die vorausgesetzte Positionierungsgenauigkeit ermöglichten phasenrichtigen Überlagerung) Gesamtenergie von n^2 im Zentrum. Im Rest des Korrelogramms überlagern sich die Phasen regellos und führen durch Kohärenzgranulation zu einem statistisch schwankenden Störuntergrund mit dem gleichen Erwartungswert, wie für das inkohärente System². Im Sinne dieser Ausführungen ist der Erwartungswert als Scharmittelwert aufzufassen. Somit ergibt sich

$$\frac{\sum E_{(\text{Zentrum})}}{\langle \sum E_{(\text{Störuntergrund})} \rangle} = \frac{n}{n(n-1)} \approx 1 \quad (3.2)$$

für $n \gg 1$. Die Energieaufteilung ist hier viel günstiger als für das inkohärente System, doch auf Grund der dargelegten Schwierigkeiten wird dieser Vorteil in vielen Fällen nur von akademischem Interesse sein.

Anhang

Die in diesem Artikel gewählte symbolische Schreibweise der Faltung wurde wegen ihrer Übersichtlichkeit hier durchgehend verwendet. Der Vollständigkeit halber sei auf die explizite Schreibweise noch kurz eingegangen. Dann führt die symbolische Schreibweise zu der bekannten Integraldarstellung:

$$f * g = \int_0^\xi f(x) g(\xi - x) dx. \quad (A.1)$$

Die Substitution $x = \xi - y$ führt Gl. (A.1) in

$$f * g = - \int_\xi^0 f(\xi - y) g(y) dy = \int_0^\xi g(y) f(\xi - y) dy = g * h$$

über (kommutatives Gesetz der Faltung).

Die explizite Schreibweise für die Faltung von drei Funktionen lautet folgendermaßen:

$$\begin{aligned} f * g * h &= f * (g * h) = \int_0^{\xi} f(\xi - x) g * h(x) dx \\ &= \int_0^{\xi} \int_y^{\xi} f(\xi - x) g(x - y) h(y) dx dy \quad (A.2) \\ &= \int_0^{\xi} dy \int_y^{\xi} f(\xi - x) g(x - y) h(y) dx . \end{aligned}$$

Durch die Substitution $x - y = \eta$ im inneren Integral in (A.2), untere Zeile, lässt sich dieser Ausdruck in

$$\begin{aligned} f * (g * h) &= \int_0^{\xi} h(y) dy \int_0^x f(\xi - y - \eta) g(\eta) d\eta \\ &= \int_0^{\xi} h(y) f * g(\xi - y) dy = h * (f * g) \quad (A.3) \\ &= (f * g) * h \end{aligned}$$

überführen (assoziatives Gesetz der Faltung).

Diese Arbeit wurde aus Mitteln des Bundesministeriums der Verteidigung ermöglicht.

- ¹ D. GABOR u. G. W. STROKE, Endeavour **23**, 40 [1969].
- ² S. LOWENTHAL u. H. ARSENAULT, J. Opt. Soc. Amer. **60**, 1478 [1970].
- ³ E. N. LEITH u. J. UPATNIEKS, J. Opt. Soc. Amer. **60**, 1478 [1970].
- ⁴ F. LANZL, H. J. MAGER u. W. WADELICH, Z. Angew. Physik **24**, 156 [1968].
- ⁵ P. BARLAI, Z. Naturforsch. **26 a**, 1441 [1971].
- ⁶ Inkohärentes Licht wird hier immer in dem Sinne quasi-monochromatisch-inkohärentes Licht verstanden.
- ⁷ J. W. GOODMAN, Introduction to Fourier Optics, McGraw-Hill, New York 1968.
- ⁸ W. MARTIENSSSEN u. E. SPILLER, Phys. Letters **24 A**, 126 [1967].

⁹ Es gibt mehrere Arten von Inkohärenz, die in ihrer Wirkung auf Granulationsausmittlung gleichwertig sind. Hier wird von der Tatsache Gebrauch gemacht, daß die den Bildpunkten entsprechenden Transversalmoden einer inkohärenten Lichtquelle zueinander inkohärent sind zum Unterschied von der in ⁵ angegebenen Methode der Granulationsausmittlung, wo ein punktförmiges Rekonstruktionszentrum, also nur ein Transversalmodus, verwendet wird. Dort entsteht die erforderliche Inkohärenz durch simultane, inkohärente Überlagerung der Longitudinalmoden der rekonstruierenden Lichtquelle.

¹⁰ R. J. COLLIER u. K. S. PENNINGTON, Appl. Phys. Letters **8**, 14 [1966].

Influence of Time Ordering on Unified Line Profiles

D. VOSLAMBER

Association EURATOM-CEA, Département de la Physique du Plasma et de la Fusion Contrôlée
Centre d'Etudes Nucléaires, 92260 Fontenay-aux-Roses, France

(Z. Naturforsch. **27 a**, 1783—1792 [1972]; received 23 August 1972)

The “width and shift” operator occurring in a previously developed unified theory of Stark broadening by plasma electrons is approximated by different expressions which include time ordering to various orders (up to order four). For the special case of the Lyman- α line in the dipole approximation results also including time ordering to all orders are calculated and compared to the approximate results. Numerical evaluations for this case are presented using the wing expression of the unified theory. A particularly good agreement with the exact profile is obtained for an approximation which maintains time ordering to fourth order. As for the accuracy of un-time-ordered profiles, our results are less optimistic than those of Godfrey et al. The role of an accurate thermal average concerning the effect of time ordering is emphasized.

I. Introduction

In a previous investigation ¹, a many-body treatment of spectral line broadening by plasma electrons has been developed using classical path methods. This treatment was combined with the usual quasi-static theory for the plasma ions. Recently, an extension of this work has been presented to include properly the effect of electron correlations ². With

respect to the broadening by electron perturbers, the line-shape formulas derived in these treatments are unified in the sense that they are valid from the line center to the far wings, including the transition region between the validity domains of the former impact and quasi-static theories.

The unified formalism essentially divides into two parts: a statistical and a dynamical one. In the statistical part the many-body problem associated to the perturbing electron gas is solved to yield a formal profile expression which apart from the dielectric properties of the plasma only involves binary